МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

С.И. Соловьева

Учебно-методическое пособие по курсу

Уравнения математической физики

для студентов инженерного потока геологического факультета

МОСКВА – 2011

УДК 517:53(075.8)
ББК 22.311я73
С60

Рецензенты:
Орлик С.И. – доцент;
Сычугов Д.Ю. – доцент

Соловьева С.И.
С60 **Уравнения математической физики:** Учебно-методическое пособие для студентов инженерного потока геологического факультета. – М.: МАКС Пресс, 2011. – 52 с.
ISBN 978-5-317-03796-3

Методическое пособие содержит основной материал курса лекций для студентов 3 курса инженерного потока геологического факультета МГУ и соответствует программе семестрового курса «Уравнения математической физики». Формулируются основные задачи для простейших уравнений в частных производных второго порядка параболического типа. Рассматриваются краевые условия первого и второго рода. Подробно описан метод разделения переменных.

УДК 517:53 (075.8)
ББК 22.311я73

Учебно-методическое издание

СОЛОВЬЕВА Светлана Ивановна

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебно-методическое пособие
для студентов инженерного потока геологического факультета

Напечатано с готового оригинал-макета
в издательстве ООО "МАКС Пресс" Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.

Подписано в печать 18.08.2011 г.
Формат 60x90 1/16. Усл.печ.л. 3,25. Тираж 100 экз. Заказ 338.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 627 к.
Тел. 939-3890, 939-3891. Тел./Факс 939-3891

ISBN 978-5-317-03796-3

СОДЕРЖАНИЕ

При подготовке данного пособия использовалась следующая литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учеб.пособие.-М.: Изд-во МГУ, 1999. - 798 с.
2. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. - М.: Мир, 1985. - 384 с.
3. Методические указания по курсу высшей математики для студентов геологического факультета.- М.: Ротапринт Нивц МГУ, 1987. - 40 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2. -М.: Высшая школа, 1999. 416 с.
5. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2005, 176 стр.

§1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции. Если независимая переменная одна, то уравнение называется *обыкновенным*; если же независимых переменных две и больше, то уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Мы будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, т.е. уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ или в разрешенном относительно y' виде $y' = f(x, y)$.

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами: 1) она является решением данного уравнения при любых значениях константы C, принадлежащих некоторому множеству; 2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$, такого, что $(x_0, y_0) \in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию. Решение $y = \varphi(x, C_0)$ называется *частным решением*, а задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*.

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y), \tag{1}$$

а также в виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0. \tag{2}$$

Приведем эти уравнения к виду, удобному для интегрирования.

В уравнении (1) вспомним, что

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

поэтому

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \tag{1'}$$

А в уравнении (2) перенесем первое слагаемое вправо

$$P(x)Q(y)dy = -M(x)N(y)dx. \tag{2'}$$

Далее решения уравнения (1') или (2') следует обе его части разделить или умножить на такое выражение, чтобы в одну его часть входила только переменная x, а в другую только – y, т.е. привести к виду

$$F(y)dy = G(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части

$$\int F(y)dy = \int G(x)dx.$$

При делении обеих частей уравнения на выражения, содержащие x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Пример 1. Решить уравнение

$$y' = 2y(x+1).$$

Решение. Приведем уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = 2y(x+1); \quad dy = 2y(x+1)dx.$$

Разделим обе части уравнения на y :

$$\frac{dy}{y} = 2(x+1)dx.$$

Переменные разделены. Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int (x+1)dx; \quad ln|y| = (x+1)^2 + C.$$

В данном случае функцию $y(x)$ можно выразить явно:

$$|y| = e^{(x+1)^2+C} \quad \Leftrightarrow \quad |y| = e^{(x+1)^2} \cdot e^C \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm e^{(x+1)^2} \cdot e^C.$$

Введём новую константу $C_1 = \pm e^C$, причем $C_1 \neq 0$, получим решение $y = C_1 e^{(x+1)^2}$, где $C_1 \neq 0$.

При делении на y могло быть потеряно решение $y = 0$. Очевидно, что $y = 0$ является решением исходного уравнения и оно войдет в ответ при $C_1 = 0$, поэтому условие $C_1 \neq 0$ следует снять и получаем общее решение $y = Ce^{(x+1)^2}$, где C - произвольная константа.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$xy' = y + 1, \qquad y(1) = 2.$$

Решение. Приведем уравнение к виду

$$x\frac{dy}{dx} = y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad xdy = (y+1)dx.$$

Разделим обе части уравнения на $x(y+1)$:

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y+1| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Отсюда, пользуясь свойствами логарифмов, находим общее решение $y(x) = Cx - 1$.

Для того, чтобы найти частное решение, необходимо учесть условие $y(1) = 2 : y(1) = C \cdot 1 - 1 = 2$. Отсюда следует, что $C = 3$. Таким образом, частное решение $y = 3x - 1$.

Решить уравнения

1. $y' = 2x$.
2. $y' = y$.
3. $xy' + y = 0, \quad y(2) = 1$.
4. $xy' = y^2 - y$.
5. $y' = 2\sqrt{y}$.
6. $\cos^2 x \cdot y' = 3 + \cos^3 x$.
7. $2x^2yy' + y^2 = 2$.
8. $\sqrt{y^2+1} = xyy'$.
9. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1$.
10. $y' \cdot \mathrm{ctg}x + y = 2, \quad y(\pi) = 0$.
11. $y' + 2y = 2, \quad y(0) = 2$.

Линейные уравнения первого порядка

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Одним из методов его решения является метод вариации постоянной. Метод состоит в следующем:

Сначала решается однородное уравнение $y' + P(x)y = 0$. Затем в общем решении $y = \varphi(x, C)$ этого уравнения произвольную постоянную C заменяют на неизвестную функцию $C = C(x)$ и выражение, полученное для y, т.е. $y = \varphi(x, C(x))$, подставляют в исходное уравнение. После такой подстановки получается дифференциальное уравнение для функции $C(x)$, решив которое получают общее решение исходного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение

$$y' + y \cdot \mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Решим сначала однородное уравнение

$$y' + y \cdot \mathrm{tg}x = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому

$$\frac{dy}{dx} = -y\,\mathrm{tg}\,x \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\mathrm{tg}\,x\,dx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx \Leftrightarrow$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{d(\cos x)}{\cos x} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C| \Leftrightarrow y(x) = C\cdot\cos x.$$

Заменим далее константу C на функцию $C(x) : y(x) = C(x)\cdot\cos x$ и подставим это выражение в исходное уравнение:

$$C'\cdot\cos x - C\cdot\sin x + C\cdot\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

После приведения подобных слагаемых получим дифференциальное уравнение для C :

$$C' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отсюда находим $C(x) = \mathrm{tg}x + C_1$, где C_1 новая произвольная постоянная. Подставив значение $C(x)$ в $y(x) = C(x)\cdot\cos x$, получим общее решение исходного уравнения:

$$y(x) = (\mathrm{tg}x + C_1)\cdot\cos x \Leftrightarrow y(x) = \sin x + C_1\cos x.$$

Решить уравнения

12. $y' + y = x$.
13. $xy' + y = e^x$.
14. $xy' - y = x, \quad y(1) = 0$.
15. $y' + 2xy = e^{-x^2}\sin x$.

16. $y' + 3y = \sin x$.
17. $y' + 2y = e^{-2x}\cos 4x$.
18. $y' + 0,5y = e^{-0,5x}$.
19. $y' + y = 2e^{-x}\cdot x$.

§2. Уравнения теплопроводности

Введение в теорию уравнений с частными производными

Большинство физических явлений в таких областях, как динамика жидкости, электричество и магнетизм, механика, оптика, теплопередача, могут быть описаны с помощью уравнений с частными производными. Большинство уравнений математической физики - это уравнения с частными производными.

Уравнение с частными производными – это уравнение, содержащее частные производные. В отличии от обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, в уравнении с частными производными неизвестная функция зависит от нескольких переменных. Например, температура $u(x,t)$ зависит от координаты x и времени t.

Для упрощения записи будем использовать следующие обозначения:

Первые производные $\dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x$; $\dfrac{\partial u}{\partial t} \equiv u_t$;

Вторая производная $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{xx}$.

Уравнения с частными производными можно классифицировать по многим признакам. Классификация важна потому, что, как оказалось, для каждого класса существует своя теория и методы решения уравнений.

Приведем некоторые методы классификации уравнений:

1. *Порядок уравнения*

   Порядком уравнения называется наивысший порядок частных производных, входящих в уравнение. Например,

   $u_t = u_x$ (уравнение первого порядка);

   $u_t = u_{xx}$ (уравнение второго порядка);

   $u_t = uu_{xxx} + \sin x$ (уравнение третьего порядка).

2. *Число независимых переменных*

   Число переменных, от которых зависит искомая функция. Например,

   $u_t = u_{xx}$ (уравнение с двумя переменными x и t);

   $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ (уравнение с тремя пространственными переменными x, y, z и временной переменной t, всего 4).

3. *Линейность*

   Уравнения с частными производными бывают *линейными* и *нелинейными*. В линейное уравнение зависимая переменная (искомая функция) и все её частные производные входят линейным образом, т.е. они не умножаются друг на друга, не возводятся в квадрат и т.д. Линейным уравнением второго порядка с двумя независимыми переменными называется уравнение вида

   $$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \tag{1}$$

   где $A, B, C, D, E, F, G-$ константы или заданные функции независимых переменных x и y. Например,

   $u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + \sin t$ (линейное уравнение);

   $uu_{xx} + u_t = 0$ (нелинейное уравнение).

4. Все линейные уравнения с частными производными второго порядка вида (1) относятся к одному из трёх типов: а) параболический, б) гиперболический, в) эллиптический. Существуют позволяющие любое линейное уравнение второго порядка привести к одному из трех канонических видов.

   Параболический тип. Уравнения параболического типа описывают процесс теплопроводности и диффузии и определяются условием

   $$B^2 - 4AC = 0.$$

   Каноническое уравнение, к которому может быть сведено уравнение (1) имеет вид

   $$u_{xx} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y).$$

   Гиперболический тип. Уравнения гиперболического типа описывают колебательные системы и волновые движения и определяются условием

   $$B^2 - 4AC > 0.$$

   Канонические уравнения, к которым может быть сведено уравнение (1) имеют вид

   $u_{yy} - u_{xx} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y)$ или $u_{xy} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y)$.

   Эллиптический тип. Уравнения эллиптического типа описывают установившиеся процессы и определяются условием

   $$B^2 - 4AC < 0.$$

   Канонические уравнения, к которым может быть сведено уравнение (1) имеют вид

   $$u_{yy} + u_{xx} = \Phi(x, y, u, u_x, u_y).$$

Нашей целью будет изучение параболического уравнения.

Уравнения теплопроводности

Уравнения параболического типа или уравнения теплопроводности наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии.

Рассмотрим однородный стержень длины L с теплоизолированной боковой поверхностью. Направим ось Ox вдоль стержня и обозначим через $u(x,t)$ температуру стержня в точке x в момент времени t. Предполагаем, что в любой момент времени температура во всех точках поперечного сечения стержня одинакова.

Простейшим уравнением, которому удовлетворяет функция $u(x,t)$, является уравнение:

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности, k – коэффициент теплопроводности, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность материала стержня. Если внутри стержня возникает или поглощается теплота (например, при прохождении тока или вследствие химических реакций и т.д.), то уравнение теплопроводности будет выглядеть следующим образом:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),$$

где $f(x,t)$ – плотность тепловых источников в точке x в момент времени t.

Для выделения единственного решения уравнения теплопроводности к уравнению присоедим начальные и граничные условия.

Начальное условие состоит в задании значений функции $u(x,t)$ в начальный момент времени $t = 0$, т.е. $u(x,0) = \varphi(x)$.

Граничные условия могут быть различны в зависимости от температурного режима на границах. Основными считают граничные условия трех типов.

1. **Условие первого рода.** На конце $x = 0$ задана температура

$$u(0,t) = \mu_1(t),$$

где $\mu_1(t)$ - заданная функция на промежутке $0 \le t \le T$ (T – момент времени, до которого изучается процесс).

2. **Условие второго рода.** На конце $x = 0$ задано значение теплового потока, протекающего через торцевое сечение стержня

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \nu_1(t).$$

3. **Условие третьего рода.** На конце $x = 0$ идет теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой, температура которой $\theta(t)$ известна, λ – коэффициент теплообмена:

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - \lambda\left(u(0,t) - \theta(t)\right) = 0.$$

Аналогичные условия можно поставить и на правом конце $x = L$ стержня:

$$u(L,t) = \mu_2(t),$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \nu_2(t),$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) + \lambda\left(u(L,t) - \theta(t)\right) = 0.$$

Причем граничные условия при $x = 0$ и $x = L$ могут быть различных типов, как рассмотренные выше так и более сложные, так что число различных задач велико.

Далее более подробно остановимся на задачах с граничными условиями первого и второго рода.

1. **Первая краевая задача** состоит в следующем. Найти решение $u = u(x,t)$ уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{при} \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T,$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$u(L,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L$$

где функции $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\varphi(x)$ – заданные функции.

2. **Вторая краевая задача** состоит в нахождении решения $u = u(x,t)$ уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{при} \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T,$$

удовлетворяющее условиям

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \nu_1(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \nu_2(t), \quad 0 \le t \le T$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L$$

где функции $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$, $\varphi(x)$ – заданные функции.

Также могут быть поставлены следующие задачи, которые носят название смешанных начально-краевых задач:

3. $$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{при} \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \nu_2(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L$$

4. $$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{при} \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T,$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \nu_1(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$u(L,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L$$

Примеры задач, приводящих к краевым задачам для уравнения теплопроводности.

1. Сформулировать краевую задачу об определении температуры однородного стержня $0 \le x \le L$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является произвольной функцией $u_0(x)$. Рассмотреть случаи, когда
а) концы стержня поддерживаются при заданной температуре,
б) на концы стержня извне подается заданный тепловой поток,
в) через концы идет теплообмен с окружающей средой, температура, которой известна.

2. Сформулировать краевую задачу об определении температуры плоского однородного слоя толщины L, если его начальная температура является произвольной функцией $u_0(x)$, а в слое распределены источники тепла с плотностью $f(x,t)$. Рассмотреть случаи, когда:
а) края слоя имеют нулевую температуру,
б) края слоя теплоизолированы.

3. Поставить задачу о распределении температуры в плоском базальтовом слое толщиной 20 км, если коэффициент теплопроводности базальта $k = 1,5\frac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{ч}\cdot{}^\circ C}$, удельная теплоемкость $c = 0,2\frac{\text{ккал}}{\text{кг}\cdot{}^\circ C}$, плотность $\rho = 2,5\frac{\text{т}}{\text{м}^3}$. Температура нижнего основания плиты 600°, верхнего основания 0°. Начальную температуру считать нулевой.

4. Поставить задачу о выравнивании заданного начального распределения температуры, имеющего форму синусоиды, причем минимальное значение равно -10°, а максимальное – 40°, в гранитном слое толщиной 100 м, если его грани не пропускают тепла. $k = 3\frac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{ч}\cdot{}^\circ C}$, $c = 0,17\frac{\text{ккал}}{\text{кг}\cdot{}^\circ C}$, $\rho = 2,58\frac{\text{т}}{\text{м}^3}$.

5. В начальный момент бассейн с водой накрыли горячей плитой, температура которой все время поддерживается равной 95°. Считая, что дно бассейна поддерживается при постоянной температуре 20° и температура воды в начальный момент была также равна 20°, поставить задачу об установлении стационарного распределения температуры в бассейне, рассматривая его в качестве плоского однородного слоя: $L = 3$м, $k = 0.5\frac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{ч}\cdot{}^\circ C}$, $c = 1\frac{\text{ккал}}{\text{кг}\cdot{}^\circ C}$, $\rho = 1\frac{\text{т}}{\text{м}^3}$.

6. Проверить, являются ли функции $u_1(x,t) = 3$; $u_2(x,t) = 3x$; $u_3(x,t) = e^{-t}\cdot\sin x$; $u_4(x,t) = x^2 t$; $u_5(x,t) = xt + 2$ решениями уравнения $u_t = u_{xx}$?

7. Проверить, являются ли функции $u_1(x,t) = 2x$; $u_2(x,t) = x^2$; $u_3(x,t) = e^{-10t}\cdot\sin 3x$;
$u_4(x,t) = t\sin 5x$; $u_5(x,t) = \left(e^{-10t} + 2e^{-9t}\right)\sin 3x$
решениями уравнения $u_t = u_{xx} - e^{-10t}\sin 3x$?

8. Проверить, являются ли функции $u_1(x,t) = \sin x + \sin 3x$; $u_2(x,t) = x$; $u_3(x,t) = e^{-t}\cdot\sin x$; $u_4(x,t) = e^{-4t}\cdot\sin x$ решениями первой краевой задачи
$u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T,$
$u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$
$u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$
$u(x,0) = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$?

9. Проверить, являются ли функции $u_1(x,t) = 1 + \cos x$; $u_2(x,t) = 1$; $u_3(x,t) = 1 + e^{-9t}\cdot\cos x$; $u_4(x,t) = e^{-t} + e^{-9t}\cdot\cos x$ решениями второй краевой задачи
$u_t = 9u_{xx}, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T,$
$u_x(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$
$u_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$
$u(x,0) = 1 + \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$?

10. Сколько существует решений уравнения $u_t = 9u_{xx}$? Попытайтесь найти решения вида $u(x,t) = e^{ax+bt}$.

11. Докажите, что если функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ удовлетворяют уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$, то сумма этих функций также удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$.

12. Пусть функция $u_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$, а функция $u_2(x,t)$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$, то решением какого уравнения будет являться сумма этих функций?
13. Пусть функция $u_1(x,t)$ является решением задачи
$(u_1)_t = a^2 (u_1)_{xx}, \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T,$
$u_1(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$
$u_1(L,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$
$u_1(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L$
а функция $u_2(x,t)$ является решением задачи
$(u_2)_t = a^2 (u_2)_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < L, t > 0,$
$u_2(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$
$u_2(L,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$
$u_2(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L$
то решением какой задачи будет являться сумма этих функций?

§3. Принцип максимума.

Если функция $u(x,t)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $\mathbf{D} = \{0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T\}$, удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

в точках области $0 < x < L$ и $0 < t \le T$, то минимальное и максимальное значения функции $u(x,t)$ в $\mathbf{D}$ достигаются или в начальный момент $t = 0$, или в точках границы $x = 0$ или $x = L$.

Пример 1. В какой момент достигается максимальное значение температуры в стержне длиной 50 см, если коэффициент температуропроводности $a^2 = 20\dfrac{\text{см}^2}{\text{сек}}$, температура левого конца и в начальный момент равна $10^\circ C$, а правого конца меняется по закону

$$u(L,t) = \frac{2000}{(t-10)^2 + 100}?$$

Решение. Так как $0 < \dfrac{2000}{(t-10)^2+100} \le 20$, причем $\dfrac{2000}{(t-10)^2+100} = 20$ при $t = 10$ сек, то, согласно принципу максимума максимальное значение температуры достигается при $t = 10$ сек на правом конце стержня и равно $20^\circ C$.

Пример 2. Пусть функция $u(x,t)$ – является решением следующей задачи

$u_t = 0,03 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 2,$
$u(x,0) = x + 1,$
$u(0,t) = e^{-t},$
$u(1,t) = 2e^{-t}.$

Существует ли на множестве $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 2$ точка (x^*, t^*) такая, что $u(x^*, t^*) = 3$? Найти эту точку.

Решение. Найдем минимальные и максимальные значения функции $u(x,t)$ на границе:
на отрезке $0 \le x \le 1: \quad 1 \le x + 1 \le 2;$
на отрезке $0 \le t \le 2: \quad e^{-2} \le e^{-t} \le 1$ и $2e^{-2} \le 2e^{-t} \le 2.$

Далее, так как

$$\max u(x,t) = \max\{\max u(x,0), \max u(0,t), \max u(L,t)\} = \max\{1,2\} = 2,$$

$$\min u(x,t) = \min\{\min u(x,0), \min u(0,t), \min u(L,t)\} = \\ = \min\{1, e^{-2}, 2e^{-2}\} = e^{-2},$$

то $e^{-2} \le u(x,t) \le 2$ и, очевидно, что в области $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 2$ функция $u(x,t)$ не может принимать значение 3.

1. Найти минимальное и максимальное значение температуры в бесконечном горизонтальном слое глины толщиной 20 м, если $k = 0,86\dfrac{\text{ккал}}{\text{м}\cdot\text{ч}\cdot\ {}^\circ C}$, $c = 0,18\dfrac{\text{ккал}}{\text{кг}\cdot\ {}^\circ C}$, $\rho = 2\dfrac{\text{т}}{\text{м}^3}$, температура нижнего края слоя меняется по закону $u(0,t) = u_1\left(\cos^2 \omega t - 1\right)$, верхнего края – по закону $u_2 \sin^2 \omega t$, а начальная температура равна нулю. $u_1 = 2^\circ C, u_2 = 4^\circ C, \omega = 0,25\text{год}^{-1}$.
2. Найти момент времени, в который достигается минимальное значение температуры в стержне длиной 100 см, если его коэффициент температуропроводности $a^2 = 10\dfrac{\text{см}^2}{\text{сек}}$, в начальный момент температура стержня равнялась $100^\circ C$, температура левого конца стержня также равна $100^\circ C$, а температура правого конца меняется со временем по закону

$$u(L,t) = u_0\left(\frac{t}{t_0} + \frac{1}{\frac{t}{t_0} + 0,1}\right),$$

где $u_0 = 10^\circ C$, а t_0 некоторое характерное время, равное 1 мин.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $u(x,t)$, являющейся решением следующей задачи
$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leq 10,$
$u(x,0) = 2\cos 2x + 1,$
$u(0,t) = \dfrac{3}{t+1}, \quad u(\pi,t) = \dfrac{3}{2t+1}$
в области $0 \leq x \leq \pi, \ 0 \leq t \leq 10$.

4. Функция $u(x,t)$ является решением следующей задачи
$u_t = 0,001u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T,$
$u(x,0) = 5x,$
$u(0,t) = t^2 - t,$
$u(1,t) = t^2 - t + 5.$
При каких значениях T на множестве $0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq t \leq T$ существует по крайней мере одна точка (x^*, t^*) такая, что $u(x^*, t^*) = 11$? Найти эту точку.

5. Функция $u(x,t)$ является решением следующей задачи
$u_t = 0,0027u_{xx}, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < t \leq 9,$
$u(x,0) = -4x^2 + 16x - 7,$
$u(0,t) = 2\left(t + \dfrac{4}{t+1}\right) - 15,$
$u(3,t) = 2\left(1 - \dfrac{t}{t+1}\right) - 3.$
а) Может ли в какой-либо точке (x^*, t^*) множества $\{0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq t \leq 9\}$ температура подняться выше отметки 10 градусов?
б) Может ли в какой-либо точке (x^*, t^*) множества $\{0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq t \leq 9\}$ температура опустится ниже отметки -11 градусов?

§4. Решение однородного уравнения теплопроводности.

Одним из методов решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности является метод разделения переменных.

Прежде, чем перейти к описанию этого метода для решения первой краевой задачи, рассмотрим вспомогательную задачу – задачу Штурма-Лиувилля.

Задача Штурма-Лиувилля (задача о собственных значениях и собственных функциях) состоит в определении значений параметра λ и, соответствующей ему нетривиальной функции $V(x)$, (т.е. $V(x) \not\equiv 0$) являющейся решением задачи

$$V'' + \lambda V = 0, \qquad 0 < x < L$$
$$V(0) = 0, \quad V(L) = 0.$$

Для решения данной задачи необходимо рассмотреть отдельно случаи, когда параметр λ равен нулю, отрицателен и положителен.

1. При $\lambda = 0$ имеем уравнение $V'' = 0$, общим решением которого является функция $V(x) = Ax + B$. Учитывая граничные условия, получим
$$V(0) = A \cdot 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0,$$
$$V(L) = A \cdot L + B = 0 \Rightarrow A = 0.$$
Следовательно, $V(x) \equiv 0$.

2. $\lambda < 0$. Покажем, что и в этом случае задача не имеет нетривиальных решений. Обозначим $\lambda = -\mu^2$, где $\mu > 0$. Решением уравнения $V'' - \mu^2 V = 0$ является функция
$$V(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$
Учтем граничные условия
$$V(0) = A + B = 0,$$
$$V(L) = Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} = 0.$$
Решим систему линейных алгебраических уравнений относительно A и B
$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -A, \\ A \cdot \left(e^{\mu L} - e^{-\mu L}\right) = 0. \end{cases}$$
Так как $L > 0$, то уравнение $e^{\mu L} - e^{-\mu L} = 0$ решений не имеет, следовательно, $A = B = 0$ и $V(x) \equiv 0$. Таким образом, и при $\lambda < 0$ задача Штурма-Лиувилля решений не имеет.

3. Рассмотрим последний случай: $\lambda > 0$. Обозначим $\lambda = \mu^2$, где $\mu > 0$. Решением уравнения $V'' + \mu^2 V = 0$ является функция
$$V(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x).$$
Учтем граничные условия
$$V(0) = B = 0,$$
$$V(L) = A\sin(\mu L) = 0.$$

Если предположим, что $A = 0$, то окажется, что и в этом случае решение задачи Штурма-Лиувилля не существует. Поэтому положим $A = 1$ и потребуем выполнения условия

$$\sin(\mu L) = 0.$$

Так как $\mu = \sqrt{\lambda}$, то имеем уравнение $\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0$. Решив его найдем собственные значения $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{L}\right)^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ и соответствующие им собственные функции $V_k(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, x\right)$.

Заметим, что в силу произвольного выбора значения постоянной A функции $V_k(x)$ определены с точностью до ненулевого множителя.

Свойства функций $V_k(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, x\right)$:

1. $\displaystyle\int_0^L V_k(x)V_m(x)dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \dfrac{L}{2}, & k = m. \end{cases}$
2. Если произвольная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, L]$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию $\varphi(0) = \varphi(L)$, то её можно разложить в ряд Фурье по функциям $V_k(x)$, т.е.

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, x\right).$$

Коэффициенты φ_k вычисляются по формулам

$$\varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, x\right)\, dx.$$

Вернемся теперь к методу разделения переменных для решения первой краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{при} \quad 0 < x < L,\ 0 < t \leq T,$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$
$$u(L,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Решение данной задачи будем искать в виде произведения $V(x)\cdot T(t)$, где $V(x) \not\equiv 0$ и $T(t) \not\equiv 0$. Подставив функцию $u(x,t) = V(x)\cdot T(t)$ в уравнение и разделив на $a^2V(x)T(t)$ получим равенство

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{V''(x)}{V(x)}.$$

Так как в левой части равенства стоит функция, зависящая только от t, а в правой – только от x, то равенство между ними возможно только в том случае, когда эти функции равны константе. Обозначим эту константу через $-\lambda$, т.е.

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{V''(x)}{V(x)} = -\lambda.$$

Запишем отдельно два полученных уравнения

для $T(t)$: $\quad T' + a^2\lambda T = 0$

и для $V(x)$: $\quad V'' + \lambda V = 0.$

Из краевого условия $u(0,t) = 0$ имеем $u(0,t) = V(0)\cdot T(t) = 0$. Так как $T(t) \not\equiv 0$, то $V(0) = 0$.

Аналогично на правом конце $u(L,t) = V(L)\cdot T(t) = 0$. Следовательно, $V(L) = 0$.

Таким образом, для функции $V(x)$ имеем задачу Штурма-Лиувилля:

$$V'' + \lambda V = 0,$$
$$V(0) = 0, \quad V(L) = 0,$$

решение которой уже получено: $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{L}\right)^2$, $V_k(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, x\right)$ и $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Рассмотрим теперь уравнение для $T(t)$. Поскольку λ теперь зависит от k, то функция $T(t)$ также должна зависит от k. Таким образом, имеем

$$T_k' + a^2\lambda_k T_k = 0.$$

Решив это уравнения методом разделения переменных (см. §1) получим, что

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{-a^2\lambda_k t}.$$

Возвращаясь к функции $u(x,t)$ заметим, что решением уравнения теплопроводности, удовлетворяющим двум краевым условиям, является любая функция $u_k(x,t) = V_k(x)T_k(t)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Запишем решение $u(x,t)$ в виде суммы функций $u_k(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\cdot e^{-a^2\lambda_k t}\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, x\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} C_k\cdot e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right).$$

Заметим, что не учтено пока начальное условие, т.е. функция $u(x,t)$ должна удовлетворять условию $u(x,0) = \varphi(x)$:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) = \varphi(x).$$

Чтобы найти значения C_k разложим функцию $\varphi(x)$ на интервале $(0, L)$ в ряд Фурье по собственным функциям $V_k(x) = \sin\frac{\pi k}{L}x$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\frac{\pi k}{L}x.$$

Из равенства

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{\pi k}{L}x = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\frac{\pi k}{L}x.$$

найдем C_k :

$$C_k = \varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)dx.$$

Итак, решением исходной первой краевой задачи является

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-a^2\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right),$$

где

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)dx.$$

Проведя аналогичные рассуждения можно решить вторую краевую задачу и две смешанные задачи.

Рассмотрим общую схему решения этих задач.

Пусть необходимо решить следующую задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad \text{при} \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L.$$

$+$ однородные граничные условия первого или второго рода.

В зависимости от типа граничных условий находим собственные значения и собственные функции. При этом можно воспользоваться следующей таблицей:

I-I	$u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$	$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2$	$V_k(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)$ $k = 1,2,3,\dots$
I-II	$u(0,t)=0$, $u_x(L,t)=0$	$\lambda_k = \left(\frac{\pi(1+2k)}{2L}\right)^2$	$V_k(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)$ $k = 0,1,2,3,\dots$
II-I	$u_x(0,t)=0$, $u(L,t)=0$	$\lambda_k = \left(\frac{\pi(1+2k)}{2L}\right)^2$	$V_k(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)$ $k = 0,1,2,3,\dots$
II-II	$u_x(0,t)=0$, $u_x(L,t)=0$	$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2$	$V_k(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)$ $k = 0,1,2,3,\dots$

Для всех типов граничных условий

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{-a^2\lambda_k t}.$$

Таким образом, можно "собрать"функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_k V_k(x)T_k(t) = \sum_k C_k \cdot e^{-a^2\lambda_k t}\cdot V_k(x).$$

Коэффициенты C_k определяются из начального условия

$$u(x,0) = \sum_k C_k V_k(x) = \varphi(x) = \sum_k \varphi_k V_k(x).$$

Здесь функцию $\varphi(x)$ разложили в ряд Фурье по собственным функциям $V_k(x)$ и для любого допустимого k

$$C_k = \varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)V_k(x)\,dx.$$

Примечание. В задаче II-II (второй краевой задаче)

$$C_0 = \frac{1}{L}\int_0^L \varphi(x)\,dx.$$

Найдя коэффициенты C_k осталось записать решение

$$u(x,t) = \sum_k C_k \cdot e^{-a^2\lambda_k t}\cdot V_k(x).$$

Пример 1. Решить краевую задачу

$$\begin{aligned}
&u_t = 9u_{xx}, && 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T,\\
&u(0,t) = 0, && 0 \le t \le T\\
&u(\pi,t) = 0, && 0 \le t \le T\\
&u(x,0) = 2\sin x + 3\sin 4x, && 0 \le x \le \pi.
\end{aligned}$$

Решение. Здесь $a^2 = 9$, $L = \pi$. Данная задача – задача типа I-I (первая краевая задача), что соответствует первой строке таблицы. Из нее находим $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\pi}\right)^2 = k^2$, $V_k(x) = \sin kx$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Далее, $T_k(t) = C_k \cdot e^{-9k^2 t}$. Следовательно,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-9k^2 t} \cdot \sin kx.$$

Из начального условия

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin kx =$$

$$= C_1 \sin x + C_2 \sin 2x + C_3 \sin 3x + C_4 \sin 4x + C_5 \sin 5x + \ldots =$$

$$= 2\sin x + 3\sin 4x$$

следует, что

если $k = 1$, то $C_1 = 2$;
если $k = 4$, то $C_4 = 3$;
если $k \neq 1, 4$, то $C_k = 0$.

И решение исходной краевой задачи запишем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot e^{-9k^2 t} \cdot \sin kx = 2e^{-9t} \sin x + 3e^{-144t} \sin 4x.$$

Пример 2. Решить краевую задачу

$$\begin{aligned} & u_t = 4u_{xx}, && 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T, \\ & u(0,t) = 0, && 0 \le t \le T \\ & u(\pi,t) = 0, && 0 \le t \le T \\ & u(x,0) = 3\sin\frac{5x}{2} - 5\sin\frac{x}{2}, && 0 \le x \le \pi. \end{aligned}$$

Решение. Здесь $a^2 = 4$, $L = \pi$. Данная задача – задача типа I-II, что соответствует второй строке таблицы. Из нее находим $\lambda_k = \left(\frac{\pi(1+2k)}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{1+2k}{2}\right)^2$, $V_k(x) = \sin\frac{1+2k}{2}x$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$T_k(t) = C_k \cdot e^{-4\left(\frac{1+2k}{2}\right)^2 t} = C_k \cdot e^{-(1+2k)^2 t}$.

Следовательно,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{-(1+2k)^2 t} \cdot \sin\frac{1+2k}{2}x.$$

Учтем начальное условие

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin\frac{1+2k}{2}x =$$

$$= C_0 \sin\frac{1}{2}x + C_1 \sin\frac{3}{2}x + C_2 \sin\frac{5}{2}x + \ldots = 3\sin\frac{5x}{2} - 5\sin\frac{x}{2},$$

из которого следует, что

если $k = 0$, то $C_0 = -5$;
если $k = 2$, то $C_2 = 3$;
если $k \neq 0, 2$, то $C_k = 0$.

И решение исходной краевой задачи запишем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{-(1+2k)^2 t} \cdot \sin\frac{1+2k}{2}x = -5e^{-t}\sin\frac{x}{2} + 3e^{-25t}\sin\frac{5x}{2}.$$

Пример 3. Решить краевую задачу

$$\begin{aligned} & u_t = u_{xx}, && 0 < x < 1,\ 0 < t \le T, \\ & u_x(0,t) = 0, && 0 \le t \le T \\ & u(1,t) = 0, && 0 \le t \le T \\ & u(x,0) = 2, && 0 \le x \le 1. \end{aligned}$$

Решение. Здесь $a^2 = 1$, $L = 1$. Данная задача – задача типа II-I, что соответствует третьей строке таблицы. Из нее находим

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(1+2k)}{2 \cdot L}\right)^2 = \left(\frac{\pi(1+2k)}{2}\right)^2,$$

$$V_k(x) = \cos\frac{\pi(1+2k)}{2}x,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Далее, $T_k(t) = C_k \cdot e^{-\frac{1}{4}(\pi(1+2k))^2 t}$. Следовательно,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot e^{-\frac{1}{4}(\pi(1+2k))^2 t} \cdot \cos\frac{\pi(1+2k)}{2}x.$$

Начальное условие

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot \cos\frac{\pi(1+2k)}{2}x = 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \cdot \cos\frac{\pi(1+2k)}{2}x.$$

Здесь формально разложили 2 в ряд Фурье по собственным функциям $\cos\frac{\pi(1+2k)}{2}x$ и для любого $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$C_k = \varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x) V_k(x)\, dx = 2\int_0^1 2\cos\frac{\pi(1+2k)}{2}x\, dx =$$

$$= 4\int_0^1 \cos\frac{\pi(1+2k)}{2}x\,dx = \frac{8}{\pi(1+2k)}\sin\frac{\pi(1+2k)}{2}x\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{8}{\pi(1+2k)}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right) = \frac{8(-1)^k}{\pi(1+2k)}$$

Таким образом, можем выписать решение исходной краевой задачи

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8(-1)^k}{\pi(1+2k)}\cdot e^{-\frac{1}{4}(\pi(1+2k))^2\,t}\cdot\cos\frac{\pi(1+2k)}{2}x.$$

Пример 4. Решить краевую задачу

$$u_t = 0,25u_{xx}, \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < t \le T,$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$$
$$u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0, \quad 0 \le t \le T$$
$$u(x,0) = x+1, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Здесь $a^2 = 0,25$, $L = \frac{\pi}{2}$. Данная задача – задача типа II-II (вторая краевая задача), Из соответствующей (четвертой) строки таблицы находим $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 = 4k^2$, $V_k(x) = \cos 2kx$, $k = 0,1,2,3,\ldots$. Далее $T_k(t) = C_k\cdot e^{-0,25\cdot 4k^2\,t} = C_k\cdot e^{-k^2\,t}$. Следовательно,

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}C_k\cdot e^{-k^2\,t}\cdot\cos 2kx = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty}C_k\cdot e^{-k^2\,t}\cdot\cos 2kx.$$

Из начального условия

$$u(x,0) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty}C_k\cos 2kx = x+1 = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cos 2kx\,.$$

Вычислим значения C_k :

$$C_0 = \frac{1}{L}\int_0^L\varphi(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\,dx = \frac{\pi}{4}+1;$$

$$C_k = \varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L\varphi(x)V_k(x)\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\cos 2kx\,dx = \frac{1}{4k^2}\left((-1)^k - 1\right)$$

И решение исходной краевой задачи запишем в виде

$$u(x,t) = \frac{\pi}{4}+1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2}\left((-1)^k-1\right)\cdot e^{-k^2\,t}\cdot\cos 2kx.$$

Заметим, что при четных значениях k (т.е. при $k = 2m$) все $C_k = 0$, а при нечетных (т.е. при $k = 2m+1$) – $C_k = -\frac{1}{2k^2}$ и решение можно записать в виде

$$u(x,t) = \frac{\pi}{4}+1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2(2m+1)^2}\cdot e^{-(2m+1)^2\,t}\cdot\cos 2(2m+1)x.$$

Решить следующие краевые задачи

1. $u_t = 0,25u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
   $u(0,t) = 0,$
   $u(\pi,t) = 0,$
   $u(x,0) = 2\sin x.$
2. $u_t = 0,5u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0,$
   $u(0,t) = 0,$
   $u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0,$
   $u(x,0) = 3\sin 4x.$
3. $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
   $u(0,t) = 0,$
   $u(1,t) = 0,$
   $u(x,0) = 2,9\sin\pi x + 4,8\sin 3\pi x.$
4. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{3}, t > 0,$
   $u(0,t) = 0,$
   $u\left(\frac{\pi}{3},t\right) = 0,$
   $u(x,0) = \sin 3x + 2,5\sin 9x.$
5. $u_t = 0,04u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
   $u(0,t) = 0,$
   $u_x(\pi,t) = 0,$
   $u(x,0) = 2\sin\frac{5x}{2}.$
6. $u_t = \frac{2}{9}u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0,$
   $u(0,t) = 0,$
   $u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0,$
   $u(x,0) = 0,5\sin 3x.$
7. $u_t = 0,16u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
   $u(0,t) = 0,$
   $u_x(1,t) = 0,$
   $u(x,0) = 2\sin\frac{\pi x}{2} + 0,4\sin\frac{5\pi x}{2}.$

8. $u_t = \frac{16}{81}u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u(0,t) = 0,$
$u_x(\pi,t) = 0,$
$u(x,0) = 3\sin\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{9x}{2}.$

9. $u_t = \frac{1}{625}u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u(\pi,t) = 0,$
$u(x,0) = 0,2\cos\frac{5x}{2}.$

10. $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0,$
$u(x,0) = 0,15\cos 3x.$

11. $u_t = \frac{1}{25\pi^2}u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u(1,t) = 0,$
$u(x,0) = 0,18\cos\frac{\pi x}{2} + 4\cos\frac{5\pi x}{2}.$

12. $u_t = \frac{1}{81}u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u(\pi,t) = 0,$
$u(x,0) = \frac{1}{3}\cos\frac{3x}{2} + 6,2\cos\frac{9x}{2}.$

13. $u_t = 0,04u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u_x(1,t) = 0,$
$u(x,0) = 3.$

14. $u_t = 0,25u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u_x(\pi,t) = 0,$
$u(x,0) = 2\cos 4x.$

15. $u_t = \frac{1}{64}u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{4}, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u_x\left(\frac{\pi}{4},t\right) = 0,$
$u(x,0) = 2 + 3\cos 8x.$

16. $u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 2, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u_x(2,t) = 0,$
$u(x,0) = 2\cos\frac{3\pi x}{2} + 5\cos 2\pi x.$

17. $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u(0,t) = 0,$
$u(\pi,t) = 0,$
$u(x,0) = x(\pi - x).$

18. $u_t = 0,04u_{xx}, \quad 0 < x < 2, t > 0,$
$u(0,t) = 0,$
$u(2,t) = 0,$
$u(x,0) = 1 - |x-1|.$

19. $u_t = 0,16u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u(0,t) = 0,$
$u_x(1,t) = 0,$
$u(x,0) = x^2 - 2x.$

20. $u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u(0,t) = 0,$
$u_x(\pi,t) = 0,$
$u(x,0) = 2(\cos x - 1).$

21. $u_t = 0,08u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u(\pi,t) = 0,$
$u(x,0) = \cos x + 1.$

22. $u_t = 0,004u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u(1,t) = 0,$
$u(x,0) = x - 1.$

23. $u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u_x(1,t) = 0,$
$u(x,0) = x.$

24. $u_t = 0,25u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u_x(\pi,t) = 0,$
$u(x,0) = 1 + 3x^2.$

§5. Решение неоднородного уравнения теплопроводности.

Решение неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = 0 \tag{2}$$

и нулевыми граничными условиями будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям $V_k(x)$:

$$u(x,t) = \sum_k u_k(t) \cdot V_k(x), \tag{3}$$

считая при этом t параметром. Для нахождения функции $u(x,t)$ следует определить функции $u_k(t)$. Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда

$$f(x,t) = \sum_k f_k(t) \cdot V_k(x), \tag{4}$$

где

$$f_k(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)V_k(x)\,dx.$$

Замечание. В задаче II-II: $f_0(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L f(x,t)\,dx.$

Подставив предполагаемую форму решения (3) и разложение функции $f(x,t)$ (4) в исходное уравнение (1), будем иметь

$$\sum_k u_k'(t)V_k(x) = -a^2\sum_k \lambda_k^2 u_k(t)V_k(x) + \sum_k f_k(t)V_k(x).$$

или

$$\sum_k \left(u_k'(t) + \lambda_k^2 a^2 u_k(t) - f_k(t)\right)\cdot V_k(x) = 0.$$

В силу линейной независимости функций $V_k(x)$ все коэффициенты разложения равны нулю, т.е.

$$u_k'(t) + \lambda_k^2 a^2 u_k(t) = f_k(t). \tag{5}$$

Пользуясь начальным условием для $u(x,t)$

$$u(x,0) = \sum_k u_k(0)V_k(x) = 0,$$

получаем начальное условие для $u_k(t)$:

$$u_k(0) = 0. \tag{6}$$

Решая задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (5), (6) находим все функции $u_k(t)$ и, подставляя их в формулу (3), получаем решение исходной задачи.

Пример 1. Решить краевую задачу

$$\begin{aligned}
&u_t = \frac{1}{9\pi^2}u_{xx} + \sin 3\pi x, \quad \text{при} \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \le T,\\
&u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T\\
&u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T\\
&u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1.
\end{aligned}$$

Решение. Здесь $a^2 = \dfrac{1}{9\pi^2}$, $L = 1$. Собственными значениями данной задачи (первой краевой) являются $V_k(x) = \sin \pi k x$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, решение будем искать в виде ряда Фурье:

$$u(x,t) = \sum_k u_k(t)\cdot V_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\cdot \sin \pi k x. \tag{7}$$

Представим функцию $f(x,t) = \sin 3\pi x$ в виде ряда

$$f(x,t) = \sin 3\pi x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\cdot \sin \pi k x. \tag{8}$$

Очевидно, что
если $k = 3$, то $f_3 = 1$;
если $k \ne 3$, то $f_k = 0$.

Подставив предполагаемую форму решения (7) и разложение функции $f(x,t)$ (8) в исходное уравнение, будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\sin \pi k x = -\frac{1}{9\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(\pi k)^2 u_k(t)\sin \pi k x + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin \pi k x.$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k'(t) + \frac{k^2}{9}u_k(t) - f_k(t)\right)\cdot \sin \pi k x = 0.$$

В силу линейной независимости функций $\sin \pi k x$ все коэффициенты разложения равны нулю, т.е.

$$u_k'(t) + \frac{k^2}{9}u_k(t) - f_k(t) = 0.$$

Из начального условия для $u(x,t)$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\sin \pi k x = 0,$$

получаем начальное условие для $u_k(t)$:

$$u_k(0) = 0.$$

Таким образом, для нахождения $u_k(t)$ имеем две задачи Коши:

Первая для $k = 3$:

$$u_3' + u_3 = 1,$$

$$u_3(0) = 0.$$

Её решением является функция $u_3(t) = 1 - e^{-t}$.

Вторая для $k \neq 3$:

$$u_k'(t) + \frac{k^2}{9}u_k(t) = f_k(t),$$

$$u_k(0) = 0.$$

Решением данной задачи является $u_k(t) \equiv 0$ для любых $k \neq 3$.

Выпишем теперь окончательное решение (7) исходной задачи

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cdot \sin \pi kx = u_3(t) \cdot \sin \pi kx = \left(1 - e^{-t}\right) \cdot \sin 3\pi x.$$

Решить следующие краевые задачи

1. $u_t = 0,25u_{xx} + 5\sin 2x, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
   $u(0,t) = 0,$
   $u(\pi,t) = 0,$
   $u(x,0) = 0.$

2. $u_t = u_{xx} + x, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
   $u(0,t) = 0,$
   $u(\pi,t) = 0,$
   $u(x,0) = 0.$

3. $u_t = \dfrac{1}{9}u_{xx} + 3e^{-0,25t}\sin\dfrac{3x}{2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
   $u(0,t) = 0,$
   $u_x(\pi,t) = 0,$
   $u(x,0) = 0.$

4. $u_t = u_{xx} + 1, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, t > 0,$
   $u(0,t) = 0,$
   $u_x\left(\dfrac{\pi}{2},t\right) = 0,$
   $u(x,0) = 0.$

5. $u_t = \dfrac{4}{25\pi^2}u_{xx} - 3e^{-t}\cos 5\pi x + 2\cos 3\pi x, \quad 0 < x < 0,5,\ t > 0,$
   $u_x(0,t) = 0,$
   $u(0,5,t) = 0,$
   $u(x,0) = 0.$

6. $u_t = \dfrac{1}{16\pi^2}u_{xx} + 2 - 3t\cos 4\pi x, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
   $u_x(0,t) = 0,$
   $u_x(1,t) = 0,$
   $u(x,0) = 0.$

§6. Общая краевая задача.

Рассмотрим общие краевые задачи

I-I: (Первая краевая задача)

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad \text{при} \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$u(L,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L$$

II-II: (Вторая краевая задача)

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad \text{при} \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \nu_1(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \nu_2(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L$$

I-II:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad \text{при} \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T,$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \nu_2(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L$$

II-I:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad \text{при} \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \nu_1(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$u(L,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le L$$

Для применения метода разделения переменных в качестве первого обязательного этапа решения общей краевой задачи необходимо граничные условия превратить в однородные. Для этого решение данных задач, функцию $u(x,t)$, будем искать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t),$$

где $v(x,t)$ – неизвестная функция, представляющая собой отклонение от некоторой известной функции $U(x,t)$. Функцию $U(x,t)$ выбираем таким образом, чтобы она удовлетворяла тем же граничным условиям, что и $u(x,t)$. Очевидно, что выбор такой функции неоднозначен, поэтому ее следует выбирать в максимально простом виде.

Для всех задач, кроме задачи II-II функцию $U(x,t)$ можно искать в виде линейной функции по x:

$$U(x,t) = Ax + B,$$

а для задачи II-II – в виде квадратичной функции по x:

$$U(x,t) = Ax^2 + Bx + C,$$

где коэффициенты зависят, вообще говоря, от времени t.

Примечание. В задаче II-II для функции $U(x,t) = Ax^2 + Bx + C$ из граничных условий невозможно однозначно определить значение константы C. Для определенности будем считать $C = 0$.

Пример 1. Свести к задаче с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} + 1 - \frac{x}{L}, \quad \text{при} \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T,\\
&u(0,t) = t, \quad 0 \le t \le T\\
&u(L,t) = t^2, \quad 0 \le t \le T\\
&u(x,0) = x, \quad 0 \le x \le L.
\end{aligned}$$

Решение. Представим функцию $u(x,t)$ в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t),$$

где $v(x,t)$ – неизвестная функция, а $U(x,t) = Ax + B$, причем

$$U(0,t) = t,$$

$$U(L,t) = t^2.$$

Найдем коэффициенты A и B:

$$U(x,t) = Ax + B,$$

$$x = 0: \quad U(0,t) = A \cdot 0 + B = t \quad \Rightarrow B = t;$$

$$x = L: \quad U(L,t) = A \cdot L + B = t^2 \quad \Rightarrow A = \frac{1}{L}(t^2 - t).$$

Следовательно, $U(x,t) = \dfrac{x}{L}(t^2 - t) + t$ и

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{L}(t^2 - t) + t.$$

Подставим данную функцию $u(x,t)$ в исходное уравнение, а именно в

$$u_t = a^2 u_{xx} + 1 - \frac{x}{L}.$$

Так как $u_t = v_t + \dfrac{x}{L}(2t-1) + 1, \quad u_x = v_x + \dfrac{1}{L}(t^2 - t)$ и $u_{xx} = v_{xx}$, то

$$v_t + \frac{x}{L}(2t-1) + 1 = a^2 v_{xx} + 1 - \frac{x}{L},$$

или

$$v_t = a^2 v_{xx} - \frac{2xt}{L}.$$

Пересчитаем начальное условие:

$$u(x,0) = v(x,0) + \frac{x}{L}(0^2 - 0) + 0 = x \Rightarrow v(x,0) = x.$$

Далее краевые условия:

$$u(0,t) = v(0,t) + \frac{0}{L}(t^2 - t) + t = t \Rightarrow v(0,t) = 0.$$

$$u(L,t) = v(L,t) + \frac{L}{L}(t^2 - t) + t = t^2 \Rightarrow v(L,t) = 0.$$

Таким образом, получаем задачу для $v(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&v_t = a^2 v_{xx} - \frac{2xt}{L}, \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T\\
&v(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T\\
&v(L,t) = 0, \quad 0 \le t \le T\\
&v(x,0) = x, \quad 0 \le x \le L.
\end{aligned}$$

Далее, чтобы найти решения данной задачи, представим его в виде суммы двух функций, т.е. $v(x,t) = v^1(x,t) + v^2(x,t)$, где функция $v^1(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned}
&v^1_t = a^2 v^1_{xx}, \quad 0 < x < L,\ 0 < t \le T\\
&v^1(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T
\end{aligned}$$

$$v^1(L,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$$
$$v^1(x,0) = x, \quad 0 \le x \le L,$$

а функция $v^2(x,t)$ – задачи

$$v_t^2 = a^2 v_{xx}^2 - \frac{2xt}{L}, \quad 0 < x < L, \ 0 < t \le T$$
$$v^2(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$$
$$v^2(L,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$$
$$v^2(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le L.$$

Пример 2. Свести к задаче с однородными граничными условиями

$$u_t = u_{xx} - x^2 \sin t - 2\cos t, \quad \text{при} \quad 0 < x < 1, \ 0 < t \le T,$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$$
$$u_x(1,t) = 2\cos t, \quad 0 \le t \le T$$
$$u(x,0) = x^2 + \cos \pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Решение. Представим функцию $u(x,t)$ в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t),$$

где $v(x,t)$ – неизвестная функция, а $U(x,t) = Ax^2 + Bx$, причем

$$U_x(0,t) = 0,$$

$$U_x(1,t) = 2\cos t.$$

Найдем коэффициенты A и B :

$$U_x(x,t) = 2Ax + B,$$

$$x = 0: \quad U_x(0,t) = 2A \cdot 0 + B = 0 \quad \Rightarrow B = 0;$$

$$x = L: \quad U_x(1,t) = 2A \cdot 1 + B = 2\cos t \quad \Rightarrow A = \cos t.$$

Следовательно, $U(x,t) = x^2 \cos t$ и

$$u(x,t) = v(x,t) + x^2 \cos t.$$

Подставим данную функцию $u(x,t)$ в исходное уравнение, а именно в

$$u_t = u_{xx} - x^2 \sin t - 2\cos t.$$

Так как

$$u_t = v_t - x^2 \sin t, \quad u_x = v_x + 2x\cos t \quad \text{и} \quad u_{xx} = v_{xx} + 2\cos t,$$

то

$$v_t - x^2 \sin t = v_{xx} + 2\cos t - x^2 \sin t - 2\cos t$$

или

$$v_t = v_{xx}.$$

Пересчитаем начальное условие:

$$u(x,0) = v(x,0) + x^2 \cos 0 = x^2 + \cos \pi x \Rightarrow v(x,0) = \cos \pi x.$$

Далее краевые условия. Так как $u_x(x,t) = v_x(x,t) + 2x\cos t$, то

$$u_x(0,t) = v_x(0,t) + 2 \cdot 0 \cdot \cos t = 0 \Rightarrow v_x(0,t) = 0.$$

$$u_x(1,t) = v_x(1,t) + 2 \cdot 1 \cdot \cos t = 2\cos t \Rightarrow v_x(1,t) = 0.$$

Таким образом, получаем задачу для $v(x,t)$:

$$v_t = v_{xx} \quad 0 < x < 1, \ 0 < t \le T$$
$$v_x(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$$
$$v_x(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$$
$$v(x,0) = \cos \pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Пример 3. Решить задачу

$$u_t = u_{xx} + 3, \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \ 0 < t \le T,$$
$$u(0,t) = 2t, \quad 0 \le t \le T$$
$$u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad 0 \le t \le T$$
$$u(x,0) = 3\sin 5x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Представим функцию $u(x,t)$ в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = v(x,t) + U(x,t),$$

где $v(x,t)$ – неизвестная функция, а $U(x,t) = Ax + B$, причем $U(0,t) = 2t$, $U_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$. Найдем коэффициенты A и B :

$$U(x,t) = Ax + B,$$
$$U_x(x,t) = A,$$
$$x = 0: \quad U_x(0,t) = A \cdot 0 + B = 2t \quad \Rightarrow B = 2t;$$
$$x = \frac{\pi}{2}: \quad U_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = A = 0 \quad \Rightarrow A = 0.$$

Следовательно, $U(x,t) = 2t$ и

$$u(x,t) = v(x,t) + 2t.$$

Подставим данную функцию $u(x,t)$ в исходное уравнение, а именно в

$$u_t = u_{xx} + 3.$$

Так как $u_t = v_t + 2, \quad u_{xx} = v_{xx}$, то $v_t + 2 = v_{xx} + 3$ или

$$v_t = v_{xx} + 1.$$

Пересчитаем начальное условие:

$$u(x,0) = v(x,0) = 3\sin 5x \Rightarrow v(x,0) = 3\sin 5x.$$

Далее краевые условия. Так как $u_x(x,t) = v_x(x,t)$, то

$$u(0,t) = v(0,t) + 2t = 2t \Rightarrow v(0,t) = 0.$$

$$u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = v_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0 \Rightarrow v_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0.$$

Таким образом, получаем задачу для $v(x,t)$:

$$\begin{array}{l} v_t = v_{xx} + 1 \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},\ 0 < t \le T \\ v(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \\ v_x\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0, \quad 0 \le t \le T \\ v(x,0) = 3\sin 5x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

Далее, чтобы найти решения данной задачи, представим его в виде суммы двух функций, т.е. $v(x,t) = v^1(x,t) + v^2(x,t)$, где функция $v^1(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{array}{l} v_t^1 = v_{xx}^1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},\ 0 < t \le T \\ v^1(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \\ v_x^1\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0, \quad 0 \le t \le T \\ v^1(x,0) = 3\sin 5x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \end{array}$$

а функция $v^2(x,t)$ – задачи

$$\begin{array}{l} v_t^2 = v_{xx}^2 + 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},\ 0 < t \le T \\ v^2(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \\ v_x^2\left(\frac{\pi}{2},t\right) = 0, \quad 0 \le t \le T \\ v^2(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

Решением первой задачи является

$$v^1(x,t) = 3e^{-25t}\sin 5x,$$

а решением второй задачи является

$$v^2(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(1+2k)^3}\left(1 - e^{-(1+2k)^2 t}\right)\sin(1+2k)x.$$

Таким образом,

$$v(x,t) = v^1(x,t) + v^2(x,t) =$$

$$= 3e^{-25t}\sin 5x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(1+2k)^3}\left(1 - e^{-(1+2k)^2 t}\right)\sin(1+2k)x$$

и

$$u(x,t) = v(x,t) + 2t =$$

$$= 2t + 3e^{-25t}\sin 5x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(1+2k)^3}\left(1 - e^{-(1+2k)^2 t}\right)\sin(1+2k)x.$$

1. Свести к задаче с однородными граничными условиями
$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u(0,t) = t, \quad u(1,t) = t^2, \quad u(x,0) = 0.$

2. Свести к задаче с однородными граничными условиями
$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0,$
$u_x(0,t) = 1, \quad u(L,t) = 0, \quad u(x,0) = 0.$

3. Свести к задаче с однородными граничными условиями
$u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x\cos x, \quad 0 < x < \pi/2, t > 0,$
$u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi/2,t) = 1, \quad u(x,0) = x.$

4. Свести к задаче с однородными граничными условиями
$u_t = u_{xx} - x^2\sin t - 2\cos t, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u_x(0,t) = 1, \quad u_x(1,t) = 2\cos t, \quad u(x,0) = x^2 + \cos\pi x.$

Решить начально-краевые задачи

5. $u_t = 0,25u_{xx} + 2x + 2\sin 2x, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u(0,t) = 0,$
$u(\pi,t) = 2\pi t,$
$u(x,0) = 3\sin 2x.$

6. $u_t = u_{xx} + x + 2, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u(0,t) = 2t,$
$u(\pi,t) = 2t,$
$u(x,0) = \sin 2x.$

7. $u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 2t + e^{-0,25t}\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u(0,t) = t^2,$
$u_x(\pi,t) = 1,$
$u(x,0) = x + 2\sin\frac{3x}{2}.$

8. $u_t = \frac{4}{25\pi^2}u_{xx} + 4x - 3e^{-t}\cos 5\pi x + 2\cos 3\pi x + 1, \ 0 < x < \frac{1}{2}, t > 0,$
$u_x(0,t) = 4t,$
$u(0.5,t) = 2t,$
$u(x,0) = 1 + \cos 5\pi x.$

9. $u_t = 4u_{xx} + 2tx + 2\cos\dfrac{5\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u_x(0,t) = 2t^2 + 1,$
$u(1,t) = 2t^2 - 1,$
$u(x,0) = x - 1.$

10. $u_t = \dfrac{1}{16\pi^2}u_{xx} + 6 - 3t\cos 4\pi x, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,$
$u_x(1,t) = 2,$
$u(x,0) = x^2 + 2\cos 4\pi x.$

11. $u_t = u_{xx}x^2 - 2t - 9\cos 3x, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
$u_x(0,t) = 1,$
$u_x(1\pi,t) = 2\pi t + 1,$
$u(x,0) = x + 1 + \cos 3x.$

§7. Решение краевых задач для уравнений теплопроводности, содержащих слагаемые u и u_x

Рассмотрим некоторые уравнения теплопроводности, которые можно свести к простейшему.

Теплообмен через боковую поверхность стержня. Уравнение

$$u_t = a^2u_{xx} - \beta\,(u - u_0)$$

описывает теплопроводность в стержне с учетом не только диффузии тепла a^2u_{xx} вдоль стержня, но и теплообмена через боковую поверхность стержня. Отток тепла ($\beta > 0$) или его приток ($\beta < 0$) пропорционален разности между температурой u стержня и температурой окружающей среды u_0 (β – постоянный коэффициент пропорциональности). Если коэффициент β велик по сравнению с a^2, то поток тепла вдоль стержня мал по сравнению с потоком через боковую поверхность и, следовательно, тепло будет течь через боковую поверхность по закону $u_t = -\beta\,(u - u_0)$.

Если величина u играет роль концентрации, то уравнение

$$u_t = a^2u_{xx} - \beta\,(u - u_0)$$

означает, что скорость изменения u_t количества субстанции зависит как от диффузии a^2u_{xx} (в направлении оси x), так и от возникновения ($\beta < 0$) или распада ($\beta > 0$) субстанции в химической реакции и пропорциональна разности между двумя концентрациями u и u_0.

Уравнение конвективной диффузии. Предположим, что примесь распространяется вдоль потока, движущегося со скоростью γ. Тогда скорость изменения концентрации u_t определяется уравнением конвективной диффузии

$$u_t = a^2u_{xx} - \gamma u_x.$$

Слагаемое a^2u_{xx} описывает вклад диффузии, а γu_x – конвективная компонента.

Для того, чтобы привести уравнение

$$u_t = a^2u_{xx} - \beta u$$

к простейшему виду, необходимо ввести новую функцию $w(x,t)$ и сделать замену

$$u(x,t) = e^{-\beta t}\cdot w(x,t).$$

Для уравнений

$$u_t = a^2u_{xx} - \gamma u_x$$

и

$$u_t = a^2u_{xx} - \beta u - \gamma u_x$$

удобна замена

$$u(x,t) = e^{bx+ct}\cdot w(x,t),$$

где коэффициенты b и c заранее неизвестны, но их легко подобрать так, чтобы уравнение для $w(x,t)$ было максимально простым.

Пример 1. Решить задачу

$$\begin{aligned} &u_t = \frac{1}{4}u_{xx} - u, \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T,\\ &u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T\\ &u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T\\ &u(x,0) = 2\sin 2x + 3\sin 4x, \quad 0 \le x \le \pi. \end{aligned}$$

Решение. Введем новую функцию $w(x,t)$ и сделаем замену

$$u(x,t) = e^{-t}\cdot w(x,t).$$

Тогда

$$u_t = -e^{-t}\cdot w + e^{-t}\cdot w_t, \qquad u_{xx} = e^{-t}\cdot w_{xx}.$$

Подставим u, u_t и u_{xx} в исходное уравнение:

$$-e^{-t}\cdot w + e^{-t}\cdot w_t = \frac{1}{4}e^{-t}\cdot w_{xx} - e^{-t}\cdot w.$$

Получим уравнение для $w(x,t)$:

$$w_t = \frac{1}{4}w_{xx}.$$

Пересчитаем граничные и начальные условия:

$$u(0,t) = e^{-t}\cdot w(0,t) = 0 \;\Leftrightarrow\; w(0,t) = 0,$$

$$u(\pi,t) = e^{-t}\cdot w(\pi,t) = 0 \;\Leftrightarrow\; w(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = e^{-0}\cdot w(x,0) = 2\sin 2x + 3\sin 4x \;\Leftrightarrow\; w(x,0) = 2\sin 2x + 3\sin 4x.$$

Таким образом, получили задачу для $w(x,t)$:

$$w_t = \frac{1}{4}w_{xx}$$
$$w(0,t) = 0,$$
$$w(\pi,t) = 0,$$
$$w(x,0) = 2\sin 2x + 3\sin 4x.$$

Решением этой задачи является функция

$$w(x,t) = 2e^{-t}\sin 2x + 3e^{-4t}\sin 4x.$$

Осталось перейти к функции $u(x,t)$ по формуле

$$u(x,t) = e^{-t}\cdot w(x,t) = e^{-t}\left(2e^{-t}\sin 2x + 3e^{-4t}\sin 4x\right) =$$
$$= 2e^{-2t}\sin 2x + 3e^{-5t}\sin 4x.$$

Пример 2. Решить задачу

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} - 2u_x + u + e^x\sin x - t \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T,\\
&u(0,t) = 1 + t, \quad 0 \le t \le T\\
&u(\pi,t) = 1 + t, \quad 0 \le t \le T\\
&u(x,0) = 1 + e^x\sin 2x \quad 0 \le x \le \pi.
\end{aligned}$$

Решение. Так как граничные условия ненулевые, то решение данной задачи будем искать в виде $u(x,t) = v(x,t) + 1 + t$, тогда функция $v(x,t)$ будет решением следующей задачи

$$\begin{aligned}
&v_t = v_{xx} - 2v_x + v + e^x\sin x \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T,\\
&v(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T\\
&v(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T\\
&v(x,0) = e^x\sin 2x \quad 0 \le x \le \pi.
\end{aligned}$$

Введем новую функцию $w(x,t)$ и сделаем ещё одну замену

$$v(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}\cdot w(x,t).$$

Вычислим производные

$$v_t = (\beta w + w_t)\,e^{\alpha x+\beta t}, \quad v_x = (\alpha w + w_x)\,e^{\alpha x+\beta t},$$

$$v_{xx} = \left(\alpha^2 w + 2\alpha w_x + w_{xx}\right)e^{\alpha x+\beta t}$$

и подставим их вместе с функцией $v(x,t)$ в уравнение для $v(x,t)$:

$$(\beta w + w_t)\,e^{\alpha x+\beta t} = \left(\alpha^2 w + 2\alpha w_x + w_{xx}\right)e^{\alpha x+\beta t} - 2\left(\alpha w + w_x\right)e^{\alpha x+\beta t} +$$
$$+ e^{\alpha x+\beta t}\cdot w(x,t) + e^x\sin x.$$

Значения α и β выберем так, чтобы в уравнении для w не было слагаемых с w и w_x. Для этого приравняем справа и слева коэффициенты при w и w_x :

$$\begin{cases}\beta = \alpha^2 - 2\alpha + 1,\\ 2\alpha - 2 = 0\end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}\alpha = 1,\\ \beta = 1.\end{cases}$$

Таким образом,

$$v(x,t) = e^{x+t}\cdot w(x,t)$$

и задача для $w(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&w_t = w_{xx} + \sin x \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T,\\
&w(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T\\
&w(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T\\
&w(x,0) = \sin 2x \quad 0 \le x \le \pi.
\end{aligned}$$

Решением данной задачи является

$$w(x,t) = e^{-4t}\sin 2x + te^{-t}\sin x$$

и, возвращаясь назад, получим

$$v(x,t) = e^{x+t}\left(e^{-4t}\sin 2x + e^{-t}\sin x\right) = e^x\left(e^{-3t}\sin 2x + t\sin x\right)$$

и

$$u(x,t) = 1 + t + e^x\left(e^{-3t}\sin 2x + t\sin x\right).$$

Решить следующие задачи

1. $u_t = u_{xx} + u + (1+x)(1-t), \quad 0 < x < 1, t > 0,$
   $u(0,t) = t, \quad u(1,t) = 2t, \quad u(x,0) = 3\sin 2x.$
2. $u_t = u_{xx} - u_x, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$
   $u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = e^{-\frac{x}{2}}.$
3. $u_t = u_{xx} + 9u - 9x + 2\sin 3x, \quad 0 < x < \pi/2, t > 0,$
   $u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi/2,t) = 1, \quad u(x,0) = x.$
4. $u_t = 0,25u_{xx} - u_x - u + 1 + x, \quad 0 < x < 1, t > 0,$
   $u(0,t) = e^{-t}, \quad u(1,t) = 1 + e^{-t}, \quad u(x,0) = x + 1 + 3e^{2x}\sin 2x.$

§8. Задачи на прямой

Кроме рассмотренных выше задач часто встречаются их предельные случаи. Рассмотрим процесс теплопроводности в очень длинном стержне. В течение небольшого промежутка времени влияние температурного режима, заданного на границе, в центральной части стержня сказывается весьма слабо, и температура на этом участке определяется в основном лишь начальным распределением температуры. В этом случае точный учет длины стержня не имеет значения, так как изменение длины стержня не окажет существенного влияния на температуру интересующего нас участка; в задачах подобного типа обычно считают, что стержень имеет бесконечную длину. Таким образом, ставится задача с начальными условиями (задача Коши) о распределении температуры на бесконечной прямой.

Найти решение уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

в области $-\infty < x < +\infty$ и $t > 0$, удовлетворяющее условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty,$$

где $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ – заданные функции.

Если $f(x,t) = f(t)$ и $\varphi(x) = const$, т.е. температура в начальный момент времени не зависит от координаты точки и внешние источники воздействуют на каждую точку одинаково, то естественно предположить, что и далее в любой момент времени температура зависеть от координаты не будет. Поэтому решение можно искать в виде функции, не зависящей от координаты, т.е. $u(x,t) = u(t)$.

Пример 1. Решить задачу

$$u_t = 0,1u_{xx} + \frac{1}{t+1} \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$$

$$u(x,0) = 1 \quad -\infty < x < +\infty.$$

Решение. Если $u(x,t) = u(t)$, то для $u(t)$ имеем задачу

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{t+1}, \\ u(0) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = ln|t+1| + C, \\ u(0) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow u(t) = ln|t+1| + 1,$$

Следовательно, $u(x,t) = ln|t+1| + 1$.

Если функции $f(x,t)$ и(или) $\varphi(x)$ имеют вид $const \cdot g(x)$, где $g(x) = \cos kx$ или $g(x) = \sin kx$, то решение можно искать в виде $u(x,t) = u(t) \cdot g(x)$.

Пример 2. Решить задачу

$$u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 4\cos 3x \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$$

$$u(x,0) = \cos 3x \quad -\infty < x < +\infty.$$

Решение. Если $u(x,t) = u(t)\cos 3x$, то для $u(t)$ имеем задачу

$$\begin{cases} u' = -u + 4, \\ u(0) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = 4 + Ce^{-t}, \\ u(0) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow u(t) = 4 - 3e^{-t},$$

Следовательно, $u(x,t) = (4 - 3e^{-t})\cos 3x$.

Пример 3. Решить задачу

$$u_t = \frac{1}{9}u_{xx} \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$$

$$u(x,0) = e^{-9x^2}\sin x \quad -\infty < x < +\infty.$$

Решение. Для решения этой задачи заметим, что если $U(x,t)$ – решение уравнения $U_t = a^2 U_{xx}$, то и функция

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2ct}} \exp\left\{-\frac{cx^2}{1+4a^2ct}\right\} \cdot U\left(\frac{x}{1+4a^2ct}, \frac{t}{1+4a^2ct}\right)$$

является его решением, т.е. $u_t = a^2 u_{xx}$.

Так как $a^2 = \dfrac{1}{9}$, то решение $u(x,t)$ будем искать в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{9}ct}} \exp\left\{-\frac{cx^2}{1+\frac{4}{9}ct}\right\} \cdot U\left(\frac{x}{1+\frac{4}{9}ct}, \frac{t}{1+\frac{4}{9}ct}\right).$$

Из начального условия

$$u(x,0) = e^{-cx^2} \cdot U(x,0) = e^{-9x^2}\sin x.$$

удобнее взять $c = 9$, тогда $U(x,0) = \sin x$.

Далее функцию $U(x,t)$ будем искать в виде $U(x,t) = f(t)\sin x$, причем $f(0) = 1$, так как $U(x,0) = f(0)\sin x = \sin x$.

Как уже было сказано выше $U(x,t)$ является решением уравнения $U_t = \frac{1}{9}U_{xx}$, поэтому имеем задачу для $f(t)$:

$$\begin{cases} f'(t)\sin x = -\dfrac{1}{9}f(t)\sin x, \\ f(0) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f' = -\dfrac{1}{9}f, \\ f(0) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow f(t) = e^{-\frac{1}{9}t}.$$

Таким образом, найдена функция

$$U(x,t) = e^{-\frac{1}{9}t}\sin x$$

и

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{9}9t}} \exp\left\{-\frac{9x^2}{1+\frac{4}{9}9t}\right\} \cdot e^{-\frac{1}{9}\frac{t}{1+\frac{4}{9}9t}} \sin\frac{x}{1+\frac{4}{9}9t}.$$

или после упрощения

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} e^{-\frac{81x^2+t}{9(1+4t)}} \sin\frac{x}{1+4t}.$$

В общем случае решением уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

в области $-\infty < x < +\infty$ и $t > 0$, удовлетворяющее условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

является функция

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t),$$

где

$$u_1(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \quad \text{(интеграл Пуассона)}$$

есть решение задачи

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx} \qquad (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ &u(x,0) = \varphi(x), \end{aligned}$$

а

$$u_2(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi\, d\tau$$

есть решение задачи

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad (-\infty < x < +\infty, t > 0) \\ &u(x,0) = 0. \end{aligned}$$

Функцию

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

часто называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$G(x,\xi,t-t_0) = \frac{Q}{2c\rho\sqrt{\pi a^2(t-t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

представляет собой температуру в точке x в момент времени t, если в начальный момент времени $t = t_0$ в точке ξ выделяется количество "теплоты" $Q = c\rho$.

Пример 4. Решить задачу

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} T, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся интегралом Пуассона и запишем решение задачи в виде

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi) d\xi = \frac{T}{2\sqrt{\pi \frac{1}{4} t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\frac{1}{4}t}} d\xi =$$

$$= \frac{T}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{t}} d\xi = \Bigg/ \begin{aligned} s &= \frac{\xi - x}{\sqrt{t}} \\ d\xi &= \sqrt{t} ds \end{aligned} \Bigg/ = \frac{T}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \sqrt{t} e^{-s^2} ds =$$

$$= \frac{T}{\sqrt{\pi t}} \left[\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds - \int_0^{-\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds\right] = \frac{T}{\sqrt{\pi t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[1 - \Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right] =$$

$$= \frac{T}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right],$$

где функция

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds$$

обычно называемая *интегралом ошибок* часто встречается в теории вероятностей и для него существуют подробные таблицы. Отметим два свойства данной функции:

1) $\Phi(z) = -\Phi(-z)$, т.е. функция нечётная.
2) $\Phi(+\infty) = 1$.

Решить следующие задачи

1. $u_t = u_{xx} - te^{-t}, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0,$
   $u(x,0) = 2.$
2. $u_t = u_{xx} + e^{-4t}\sin 2x, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0,$
   $u(x,0) = 0.$
3. $u_t = 0,1u_{xx} + 3\cos x, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0,$
   $u(x,0) = 20\cos x.$
4. $u_t = 0,25u_{xx} + e^{-t}, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0,$
   $u(x,0) = 1 + 3\cos 2x.$

5. $u_t = 0,001u_{xx} + 2\cos^2 x - 1, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0,$
$u(x,0) = \sin 3x + \cos 2x.$

6. $u_t = u_{xx} - \sin t, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0,$
$u(x,0) = 1 + \cos x.$

7. $u_t = u_{xx} - t\sin 4x, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0,$
$u(x,0) = \sin 2x.$

8. $u_t = a^2 u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$
$$u(x,0) = \begin{cases} T_1, & x \geq 0 \\ T_2, & x < 0. \end{cases}$$

9. $u_t = a^2 u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$
$$u(x,0) = \begin{cases} T_1, & x \geq b \\ T_2, & x < b. \end{cases}$$

10. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$
$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < -10 \\ 20, & x \in [-10, 10] \\ 0, & x > 10. \end{cases}$$

11. $u_t = u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$
$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-2x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

12. $u_t = u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$
$u(x,0) = e^{-x^2}.$

13. $4u_t = u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$
$u(x,0) = xe^{-x^2}.$

14. $u_t = 0,25u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$
$u(x,0) = e^{x-2x^2}.$

15. $u_t = \frac{1}{16} u_{xx} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$
$u(x,0) = \cos x \cdot e^{-0,5x^2}.$

16. $u_t = 0,25u_{xx} + 4e^{-4t} \quad -\infty < x < +\infty,\ 0 < t,$
$u(x,0) = 2\sin 3x + 5\sin 3x \cdot e^{-2x^2}.$

Приложение. Таблица интегралов.

1. $\displaystyle\int dx = x + C;$

2. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\displaystyle\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C;$

5. $\displaystyle\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C;$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

8. $\displaystyle\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C;$

9. $\displaystyle\int x\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\cdot\sin ax) + C;$

10. $\displaystyle\int x^2\cos ax\, dx = \frac{1}{a^3}\left(2ax\cdot\cos ax + (a^2x^2 - 2)\sin ax\right) + C;$

11. $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C;$

12. $\displaystyle\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C;$

13. $\displaystyle\int x\sin ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cdot\cos ax) + C;$

14. $\displaystyle\int x^2\sin ax\, dx = \frac{1}{a^3}\left(2ax\cdot\sin ax - (a^2x^2 - 2)\cos ax\right) + C;$

15. $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C;$

16. $\displaystyle\int \sin mx\cdot\cos nx\, dx =$
$$= -\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)x - \frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x + C;$$

17. $\displaystyle\int \cos mx \cdot \cos nx \, dx =$

$$= \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x + \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x + C;$$

18. $\displaystyle\int \sin mx \cdot \sin nx \, dx =$

$$= \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x - \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x + C;$$

19. $\displaystyle\int \sin mx \cdot \cos mx \, dx = -\frac{1}{4m} \cos 2mx + C;$

20. $\displaystyle\int \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{4m} \sin 2mx + \frac{x}{2} + C;$

21. $\displaystyle\int \sin^2 mx \, dx = -\frac{1}{4m} \sin 2mx + \frac{x}{2} + C;$

22. Формула интегрирования по частям

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx.$$

Ответы

§1

1. $y = x^2 + C$.
2. $y = Ce^x$.
3. $y = \dfrac{2}{x}$.
4. $y = \dfrac{1}{1 - Cx}$ и $y = 0$.
5. $y = (x + C)^2$ и $y = 0$.
6. $y = 3\mathrm{tg}x + \sin x + C$.
7. $y^2 = 2 + Ce^{\frac{1}{x}}$.
8. $y^2 = (\ln|x| + C)^2 - 1$.
9. $y = \dfrac{1}{1 + \ln|x^2 - 1|}$.
10. $y = 2 + 2\cos x$.
11. $y = 1 + e^{-2x}$.

12. $y = x - 1 + Ce^{-x}$
13. $y = \dfrac{e^x + C}{x}$.
14. $y = x \ln x$.
15. $y = (C - \cos x) \cdot e^{-x^2}$.
16. $y = 0.1 \cdot (3\sin x - \cos x) + Ce^{-3x}$.
17. $y = (0.25 \sin 4x + C)\, e^{-2x}$.
18. $y = (x + C)\, e^{-0.5x}$.
19. $y = (x^2 + C)\, e^{-x}$.

§2

6. Являются: u_1, u_2, u_3; не являются: u_4, u_5.
7. Являются: u_3, u_5; не являются: u_1, u_2, u_4.
8. Является: u_4; не являются: u_1, u_2, u_3.
9. Является: u_3; не являются: u_1, u_2, u_4.

§3

1. $-u_1 \le u(x,t) \le u_2$.
2. $t = 0,9t_0 = 0,9$ мин.
3. $-1 \le u(x,t) \le 3$.
4. $T \ge 3$.
5. а) да, б) нет.

§4

1. $u(x,t) = 2e^{-0,25t} \sin x$.
2. $u(x,t) = 3e^{-8t} \sin 4x$.
3. $u(x,t) = 2,9e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + 4,8e^{-9\pi^2 t} \sin 3\pi x$.
4. $u(x,t) = e^{-t} \sin 3x + 2,5e^{-9t} \sin 9x$.
5. $u(x,t) = 2e^{-0,25t} \sin \frac{5x}{2}$.
6. $u(x,t) = 0,5e^{-2t} \sin 3x$.
7. $u(x,t) = 2e^{-0,04\pi^2 t} \sin \frac{\pi x}{2} + 0,4e^{-\pi^2 t} \sin \frac{5\pi x}{2}$.
8. $u(x,t) = 3e^{-\frac{4}{9}t} \sin \frac{3x}{2} + 2e^{-4t} \sin \frac{9x}{2}$.
9. $u(x,t) = 0,2e^{-0,01t} \cos \frac{5x}{2}$.
10. $u(x,t) = 0,15e^{-9t} \cos 3x$.

11. $u(x,t) = 0,18e^{-0,01t}\cos\frac{\pi x}{2} + 4e^{-0,25t}\cos\frac{5\pi x}{2}$.

12. $u(x,t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{36}}\cos\frac{3x}{2} + 6,2e^{-\frac{t}{4}}\cos\frac{9x}{2}$.

13. $u(x,t) = 3$.

14. $u(x,t) = 2e^{-4t}\cos 4x$.

15. $u(x,t) = 2 + 3e^{-t}\cos 8x$.

16. $u(x,t) = 2e^{-9\pi^2 t}\cos\frac{3\pi x}{2} + 5e^{-16\pi^2 t}\cos 2\pi x$.

17. $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi k^3}\left(1-(-1)^k\right)e^{-k^2 t}\sin kx = /k = 2m+1/ = \\ = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{8}{\pi(2m+1)^3}e^{-(2m+1)^2 t}\sin(2m+1)x$$

18. $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2 k^2}\sin\frac{\pi k}{2}\,e^{-0,01\pi^2 k^2 t}\sin\frac{\pi k x}{2}$$

19. $$u(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{32}{\pi^3(1+2k)^3}\,e^{-0,04\pi^2(1+2k)^2 t}\sin\frac{\pi(1+2k)x}{2}$$

20. $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{32}{\pi(1+2k)\left((1+2k)^2-4\right)}\,e^{-(1+2k)^2 t}\sin\frac{(1+2k)x}{2}$$

21. $$u(x,t) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{\pi}\left(\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+3}\right)e^{-0,02(1+2k)^2 t}\cos\frac{(1+2k)x}{2}$$

22. $$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(1+2k)^2}e^{-0,001\pi^2(1+2k)^2 t}\cos\frac{\pi(1+2k)x}{2}$$

23. $$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k-1\right)e^{-\pi^2 k^2 t}\cos\pi kx = /k = 2m+1/ = \\ = \frac{1}{2} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2m+1)^2}e^{-\pi^2(2m+1)^2 t}\cos\pi(2m+1)x$$

24. $$u = 1 + \pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{12(-1)^k}{k^2}\,e^{-0,25k^2 t}\cos kx$$

§5

1. $u(x,t) = 5\left(1-e^{-t}\right)\sin 2x$

2. $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k^3}\left(1-e^{-k^2 t}\right)\sin kx$$

3. $u(x,t) = 3te^{-0,25t}\sin\dfrac{3x}{2}$

4. $$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(1+2k)^3}\left(1-e^{-(1+2k)^2 t}\right)\sin(1+2k)x$$

5. $u(x,t) = (e^{-4t}-e^{-t})\cos 5\pi x + \dfrac{25}{18}\left(1-e^{-1,44t}\right)\cos 3\pi x$

6. $u(x,t) = 2t + 3(t-1+e^{-t})\cos 4\pi x$

§6

1. $u(x,t) = v(x,t) + (t^2-t)x + t,$
   $v_t = a^2 v_{xx} + x - 1 - 2tx, \quad 0<x<1, t>0,$
   $v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, \quad v(x,0) = 0.$
2. $u(x,t) = v(x,t) + x - L,$
   $v_t = v_{xx}, \quad 0<x<L, t>0,$
   $v_x(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0, \quad v(x,0) = L - x.$
3. $u(x,t) = v(x,t) + x,$
   $v_t = v_{xx} + v + 2\sin 2x\cos x, \quad 0<x<\pi/2, t>0,$
   $v(0,t) = 0, \quad v_x(\pi/2,t) = 0, \quad v(x,0) = 0.$
4. $u(x,t) = v(x,t) + x + x^2\cos t,$
   $v_t = v_{xx}, \quad 0<x<1, t>0,$
   $v_x(0,t) = 1, \quad v_x(1,t) = 2\cos t, \quad v(x,0) = \cos\pi x.$
5. $u(x,t) = (2+e^{-t})\sin 2x + 2xt.$
6. $$u(x,t) = 2t + e^{-4t}\cdot\sin 2x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{k^3}\left(1-e^{-k^2 t}\right)\sin kx.$$
7. $$u(x,t) = x + t^2 + (t+2)e^{-0,25t}\sin\frac{3x}{2} + 36\left(e^{-\frac{1}{36}t}-1\right)\sin\frac{x}{2}$$
8. $$u(x,t) = (2e^{-4t}-e^{-t})\cos 5\pi x + \frac{25}{18}\left(1-e^{-1,44t}\right)\cos 3\pi x + \\ + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\pi(1+2k)}\left(25\pi^2 + (4-25\pi^2)e^{-\frac{4t}{25\pi^2}}\right)\sin\pi(1+2k)x.$$
9. $$u(x,t) = (2t^2+1)x + t^2 - 1 + \frac{2}{25\pi^2}\left(1-e^{-25\pi^2 t}\right)\cos\frac{5\pi x}{2}.$$
10. $$u(x,t) = x^2 + 3\left(1-t-e^{-t}\right)\cos 4\pi x + \left(\frac{1}{8\pi^2}+6\right)t.$$
11. $u(x,t) = x^2 t + x + (2e^{-9t}-1)\cos 3x + 1.$

§7

1. $u(x,t) = t(x+1) + 3e^{-3t}\sin 2x.$

2. $u(x,t) = e^{\frac{x}{2}-\frac{t}{4}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\left(\pi e^{\pi}(-1)^{k+1}+k\right)}{\pi\left(1+k^2\right)} e^{-k^2 t} \sin kx.$

3. $u(x,t) = x + 2t\sin 3x.$

4. $u(x,t) = 3e^{2x-3t}\sin 2x + x + e^{-t}.$

§8

1. $u(x,t) = \sin x + t(1+x).$

2. $u(x,t) = e^{-0,5x-4,25t}\sin 2x.$

3. $u(x,t) = x + 2t\sin 3x.$

4. $u(x,t) = x + e^{-t} + 3e^{2x-3t}\sin 2x.$

5. $u(x,t) = e^{-0,004t}\cos 2x + e^{-0,009t}\sin 3x.$

6. $u(x,t) = e^{-t}\cos x + \cos t.$

7. $u(x,t) = \frac{1}{256}\left(1 - 16t - e^{-16t}\right) + e^{-4t}\sin 2x$

8. $u(x,t) = \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_1-T_2}{2}\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$

9. $u(x,t) = \frac{T_1+T_2}{2} + \frac{T_1-T_2}{2}\Phi\left(\frac{x-b}{2a\sqrt{t}}\right).$

10. $u(x,t) = 20\Phi\left(\frac{8(10-x)}{\sqrt{t}}\right).$

11. $u(x,t) = \frac{1}{2}e^{4t-2x}\left(1-\Phi\left(\frac{4t-x}{2\sqrt{t}}\right)\right).$

12. $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right).$

13. $u(x,t) = \frac{1}{(1+4t)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2}{1+t}\right).$

14. $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}}\exp\left(\frac{-2x^2+x+t}{1+2t}\right).$

15. $u(x,t) = \sqrt{\frac{8}{8+t}}e^{\frac{8t-4x^2}{8+t}}\cos\frac{8x}{8+t}.$

16. $u(x,t) = 1 - e^{-4t} + e^{-\frac{9}{4}t}\sin 3x + \frac{5}{\sqrt{1+2t}}e^{-\frac{2x^2+45t}{1+2t}}\cos\frac{3x}{1+2t}.$